حول تطور المفهوم الرياضي

من خلال عينات مخطوطية عربية

د. محمد يوسف الحجيري

الألوكة

www.alukah.net

حول تطوّر المفهوم الرياضيّ من خلال عيّنات مخطوطيّة عربيّة

د. محمّد يوسُف الحجيريّ
(houjairi@hotmail.com)

الجامعة اللبنانية –كليّة الهندسة

المجلس الوطني للبحوث العلمية

(فريق الدراسة والبحث في التراث العلميّ العربيّ)

طرابلس، ٢٣ نيسان ٢٠١٦

المحتوى

- مُقدِّمة
- فرضيّة الحتميّة في البعد التاريخي.
- ماهيّة العلوم الرياضيّة
- لمحة عن تكون المفاهيم في علم الجبر :

الكتاب المختصَر في حساب الجبر والمقابلة كمثل

- **ملاحظات حول كتاب الخوارزميّ**

- تطوّر الجبر في الشرق العربيّ حتّى الخيّام
- القيمَةُ المعْرِفِيَّةُ لاسْتِنْباط مُبَرْهَنَةِ الجيوب
- حول المفاهيم الملائمة وغير الملائمة: مبرهنتا الجيوب ومنلاوس كمثل.

١ – مُقدِّمة

لقد بقي تاريخ العلم العربيّ – ومنه الرياضيّ–، مغموراً فترةً طويلة. وعلى عكس ما كان سائداً منذ فترةٍ قصيرةٍ لا تتجاوز عشرات السنين، تُشير غالبيّةُ نتائجِ تحقيقِ المخطوطات العلميّةِ العربيّة ونتائجِ دراستِها، إلى أنّ لِعلماء الحقبةِ العربيّة دورُهم الذاتيّ الكبير، ليس في تطوير العلوم الرياضيّة وتثبيت

أصولها النظريّة فحسب، بل أيضاً في تسريعِ عجلة التطوّر العلميّ.

إثر نشوء الخلافة الإسلاميّة، أدّت مركزةُ المعارِفِ العِلْمِيّةِ في لُغَةِ الضّادِ إلى بُروزِ نُظُمٍ واكتِشافاتٍ عِلْمِيّةٍ لم يَعْهَدْها التاريخُ مِنْ قَبْلُ، وَكُتِبَتْ كُلُّها بالعَرَبِيَّة: كالجَبْرِ عِنْدَ الخوارِزْميّ وَأبي كامِلٍ، والبَصَرِيّات والفَلَكِ وَرِياضِيّاتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في

الصِغَرِ عِنْدَ ابنِ الهيثم، والمعادلات الجبريّة عِنْدَ الخيام، والأُكَرِ عِنْدَ ابن عراق والخُجنديّ والبوزجانيّ الخ. ونشير هنا إلى أنّه في الوقت الّذي نجد فيه فئةً طليعيّة من علماء ذلك العصر ترابط على الجبهة الأولى للبحث العلميّ، تطالعنا أيضاً فئةٌ طليعيّة أُخْرَى من العلماء تعكِف على دراسة وتحليل وتصويب وتطوير التراث العِلْمِيّ الموروث من الأمم

السالفة. ولذلك نجد في اللّغة العربيّة العديدَ من الشروحات والإصلاحات لِكُتُبِ علماء اليونان. ونذكّر هنا بتعدّد الكتابات والشروحات والتنقيحات العربيّة التي تناولت أعمال علماء اليونان القدماء كأرخميدس وإقليدس وأبولونيوس وثاوذوسيوس الطرابلسي ومانالاوس السكندري وسواهم .

- فرضيّة الحتميّة في البعد التاريخي:

لا رَيْبَ في أنّ التَحوُّلاتِ الاقْتِصادِيَّةَ وَالسِياسِيَّةَ الجَذْرِيَّةَ الّتي واكَبَت نُشوءَ الخِلافَةِ الإسْلامِيَّةِ قَدْ أدّت إلى تَحَوُّلاتٍ نَوْعِيَّةٍ رَديفَةٍ في البُنْيَتَيْنِ الثَقافِيَّةِ والعِلْمِيَّةِ لِلشُعوبِ الّتي عاشَتْ في ظِلّ الحُكْمِ الجَديدِ. وَقَدِ امتَدَّت سُلْطَةُ تِلْكَ الخِلافَةِ على رقعةٍ جغرافيّة مُترامية الأطراف، تحدُّها الصين

شرقاً وإسبانيا الأندلسيّة غرباً. وتعدّدت وتفاوتت ثقافاتُ وتقاليدُ ولغاتُ ومعارفُ تلك الشعوب. وبغضّ النظر عَمَّا وفّرته النتائجُ الأكيدة المترتّبة على اندماجٍ وانصهارٍ ثقافِيَّيْنِ قلّ نظيرُهُما في التاريخ من أرْضِيَّةٍ خصبةٍ لتطوّر المعارف العِلْمِيّة، لا يُمكننا قطعاً أن نَحْسَبَ تطوّرَ المعرفة العِلْمِيّة في الحقبة العَرَبِيَّة مجرّدَ قيمةٍ مضافةٍ أفضت إليها

حركةُ ترجمةٍ نَشِطة (كما كان يعتقد الكثيرون من فلاسفة ومؤرّخي العلوم)، أو أوجدتها ظاهرةٌ اندماجيّةٌ بين شعوبٍ مختلفة. وذلك أنّ تطوير العلوم في ظلّ امبرطوريّة مترامية الأطراف تفرضُه موضوعيّاً – وقبل كلّ شيء – ضروراتٌ اقتصادِيّةٌ وسِياسِيَّةٌ لا يمكن تجاهلُها البتّة. فاكتشاف مبرهنة الجيوب مثلاً وتطوّر عِلْمِ الأُكَر في تِلْكَ الحقبة لم

يكونا حصيلةَ مجرّد ترجمةٍ، أو ترفٍ فكريٍّ، أو تبادلٍ لِخِبْرات الشعوب والثقافات، لا بل ارتبط هَذا الاكتشاف وذلك التطوّر جدليّا بمسائل التقويم وظواهر الفلك، والجغرافيّة الرياضية، وحركة المواصلات والإبحار الّتي كانت شأناً حيويّاً مباشراً من شؤون الدولة، له أهَمِيَّتُهُ وأبْعادُه السِياسِيَّةُ والاقْتِصادِيَّةُ والتَنْظيمِيَّةُ، وَحَتَّى العَسْكَرِيَّةُ

والاستراتيجِيَّةُ إذا صَحَّ القَوْلُ. لَقَدْ تطوّر العلم العربيُّ سريعاً إذاً، ولضروراتٍ وعللٍ كامنةٍ تعودُ جذورُها المعرفيّةُ والتاريخيّة والفلسفيّة، في المقام الأوّل، إلى مَرْكَزَةٍ اقتِصاديّةٍ وسِياسِيَّةٍ وَعَسْكَرِيَّةٍ غَيْرِ مَسْبوقَةٍ، وَتعود في المقام الثاني إلى ظاهِرَةِ انصِهارٍ عمْلاقٍ لِتَقاليدَ مُتَعَدِّدَةٍ، وإلى تَوْحيدِ لُغَةِ التَواصِلِ (اللُّغَة العَرَبِيَّة) الّتي استَقْطَبَت باللّزومِ التَكامُليّ

كُلَّ المعارِفِ العِلْمِيّةِ السابِقَةِ، وَذَلِكَ عَبْرَ حركةِ ترجمةٍ حثيثة لم يَشْهَدِ التاريخُ السابِقُ مثيلاً لها أيضاً.

٢– المنْحَى التاريخيّ لتطوّر علم الجبر في الشرق العربيّ

نهدف هنا إلى تقصّي تكوّنِ المفاهيم الجبريّة الأوّليّة عبر استعراضٍ جُزئيٍّ مبسّطٍ وسريعٍ للمسار "النظريّ – المعرفيّ"

الّذي يُمثّلُهُ تطوّرُ علم الجبر في الحقبة العربيّةِ وإلى رصدِ فروعه وتشعّباتِه.

لقد تطوّر الجبرُ العربيّ على مسارين منفصلين: المسار الحسابي والمسار الهندسيّ بَدءاً بالخوارزميّ (٧٨٧-٨٥٠) مروراً بالماهانيّ (..-٨٨٠) والخازن (...- ٩٦١)، والبيرونيّ (٩٧٣-١٠٥٠) وأبي نصرٍ بن عراق...، وصولاً

إلى قِمّة تطوّره في الأعمالِ الجبريّةِ لعمر الخيّام (١٠٤٨-١١٣١).. ولكننّا لن نخوضَ في تفاصيل هذا الأمرِ، وسنكتفي بتناولِ التطوّر المتعلّق بنظريّة المعادلات.

٢–١ ظهورُ علم الجبر ومُؤلَّفُ الخوارزميّ (٧٨٧ – ٨٥٠) – الكتاب المختصَر في حساب الجبر والمقابلة

يُعتبرُ تشكُّلُ المفهومِ الرياضيِّ قفزةً نوعيّةً تاريخيّةً فاصلةً بين المستويين الحدسيّ التجريبيّ والنظريّ المجرّد، فإدراكُ "مقدارٍ فعليٍّ معيّنٍ" يختلفُ نوعياً عن إدراكِ مفهومِ "مُتَغَيِّرٍ ما

في مجموعةِ المقادير". وحلُّ "معادلةٍ جبريّةٍ مُعيّنةٍ" من الدرجة الثانية يختلفُ نوعيّاً أيضاً عن مسألةِ البحث عن حلِّ "المعادلةِ الجبريّة من الدرجة الثانية بشكلها المجرّد العامّ"، وإعطاءُ برهانٍ لِ "مسألةٍ هندسيّةٍ معيّنةٍ" يتباينُ نوعيّاً مع بناء نظريّةٍ شموليّةٍ قادرةٍ على حلِّ جملةٍ من المسائل الهندسيّة دفعةً واحدةً. إنّ تَكَوُّنَ مفهومِ "الأصابع الخمس" قد سبق بزمنٍ

طويلٍ — وهذا لاشكّ فيه – تكوّنَ مفهومِ العدد "خمسة"، وكذلك الأمرُ، فإنّ تَكَوُّنَ مفهومِ "شجرة الّتين" قد سبق بزمنٍ طويلٍ تَكَوُّنَ مفهومِ "الشجرة" بالمعنى الشموليّ للكلمة. ومن البديهيّ أن تُمَثِّلَ ظاهرةُ الانتقال من "المفهوم الحسيِّ الملموس" إلى "المفهوم المجرّد" – من حيثُ الأبعاد المعرفيّة — قفزةً نوعيّةً في مسيرة التطوّر العلميّ، ولكنّ تبلورَ

هذه القفزة النوعيّة قد يستغرقُ ألوف السنين. إنّ المفاهيمَ المجرّدة هي اللّبناتُ الأساسيّةُ الّتي تُبنى منها الاستدلالاتُ وأشكالُ التفكير في مستواها النظريّ، وذلك بواسطة لغةٍ نظريّةٍ خاصّةٍ تلعب دور الجسد الّذي يحمل هذه المفاهيم. أما تَكَوُّنُ النظريّات الرياضيّة (أي النماذج النظريّة) فهو أمرٌ اكثرُ تعقيداً بكثير من تَكَوُّنِ المفاهيم الرياضيّة المجرّدة،

وهو يتطلّب أُسْوَةً بالمفاهيم المجرّدة لغةً خاصّةً موسّعةً (ما وراء اللّغة) قادرةً، ليس على حملِ الاستدلالات فحسب، بل على جعل التعاطي معها و"تحريكها" أمراً سهلاً ومُمكناً. **ولمّا كانت الرِياضيّاتُ علماً يتناولُ دراسةَ الأشكال الفضائيّة والعلاقات الكميّة في الواقع الموضوعيّ**، فقد تجسّدت ملامحُ الشقّ الأوّل من هذا التحديد المعرفيّ بظهورٍ تاريخيٍّ

للهندسة الإقليديّة كنموذجٍ رياضيٍّ للأشكال الفضائيّة، حيث تكوّنت المفاهيمُ المجرّدة في هذا العلم تباعاً وفي فترةٍ تاريخيّةٍ مديدةٍ ساهمت فيها التقاليدُ المختلفة. وتبلورت بشكل نظريّةٍ "مكتملةٍ" – وذلك بكلّ ما لكلمة نظريّة على المستوى النظريّ من معنى – عند إقليدس في كتاب الأصول. أما الشقُّ الثاني للتحديد، أي الشقّ المتعلّق

بالعلاقات الكميّة، فقد لَقِيَ تطوّراً نوعيّاً في تبلوره، وعلى المستوى النظريّ الأكيد، لدى الخوارزميّ الّذي أرسى أُسُس علمٍ جديدٍ بمفاهيمه ومنهجيّتِهِ وأهدافه، وقدرته الشموليّة الكامنة على نَمْذَجة مجموعةٍ ضخمةٍ من العلاقات الكميّة لظواهر وأشياء الواقع المحسوس. ومن الطبيعيّ أن تتفاوتَ المفاهيمُ المجرّدةُ فيما بينها، من حيث صعوبةِ أو سهولةِ

إدراكِها، ومن حيث نسق الوصول إليها. فمفهوما الدائرة والمستقيم، مثلاً، أبسطُ نسبيّاً من مفهومِ "الجذر" (بالمعنى الّذي ورد فيه في جبر الخوارزميّ وتطوّرِه اللاّحق)، وذلك لارتباطهما المباشر بالواقع الملموس، فالدائرةُ تجريدٌ مباشرٌ لقرص الشمس والقمر، والخطُّ المستقيمُ تجريدٌ لاستقامةِ الخيط المشدودِ من طرفَيْه. ويفرض هذا الأمرُ – لا ريب في

ذلك – تأثيرَه لجهة أسبقيّةِ تَكَوُّنِ النظريّات العلميّة، وهذا بالفعل ما نراه: فلقد تبلورت نظريّةُ الهندسة الإقليديّة قبل ظهور علم الجبر بعدّة قرون.

إن الإشكاليات ذات الطابع المعرفيّ – المنطقيّ الّتي تواكبُ بناءَ النظريّة الرياضيّة لا تنتهي في مرحلة معيّنة من تطوّر هذه النظريّة، فمسائلُ الاكتمالِ المنطقيّ، وعدم

التناقض، وأساليبُ التأويل تُشكّلُ أموراً مُلازمةً لكلّ نظريّةٍ رياضيّة. وبغضّ النظر عن الضرورات الّتي تفرض علينا الاستعانةَ بأساليبَ من خارج النظريّة، نستطيع الجزمَ بأنّه يُوجد:

١ – ميلٌ (جنوحٌ) موضوعيٌّ (مستقلٌّ عن المسائل المنفصلة وعن إرادة الباحث) إلى تطوير النظريّة الرياضيّة، وهذا الأمر

يأتي كردٍّ لا مفرّ منه على مسألة الاكتمال المنطقيّ. وفي هذه الحالة تُضافُ إلى النظريّة الرياضيّة موضوعاتٌ جديدةٌ مأخوذةٌ من مكانٍ آخر (من نظريّةٍ ثانية). تُغني وتُوسّعُ هذه الموضوعاتُ النظريّةَ القديمةَ، فيولد كيانٌ نظريٌّ ذو بنيةٍ جديدة أغْنَى من البنية الّتي امتلكتها النظريّةُ الأُولى.

٢- ميلٌ موضوعيٌّ لاستبعادِ "التناقض المنطقيّ"، الأمرُ

الّذي يدفعُنا بالضرورة للتثبُّت من خُلُوِّ النظريّة الرياضيّة من التناقض، وذلك عَبْرَ تأويلها بواسطة نظريّةٍ رياضيّةٍ أُخْرَى "غيرِ مشكوكٍ فيها".وتكتسب تقنيّةُ التأويل هذه أهميةً بالغةً لأنّها تُفسح المجالَ أمام الانتقالِ من نموذجٍ رياضيٍّ إلى نموذجٍ آخر، بحُجّة التطابقِ الناتجِ من علاقة التأويل.

نرى أنّ "دمجَ" النظريّات الرياضيّة وتداخلَها فيما بينها

أمورٌ موضوعيّةٌ، تفرِضُها دوافعُ كامنةٌ لها صِلةٌ مباشرةٌ بمقولَتَي الاكتِمالِ النظريّ وعدمِ التناقض. وهذا ما حدث بالفعل بين الهندسة الإقليديّة وجبر الخوارزميّ، وبين طُرُق الاستنفاد – أي بذور الطُرُق التحليليّة – والهندسة الإقليديّة.

بين عامَي ٨١٣ و ٨٣٣، في عهد المأمون كتب محمّدُ بنُ موسى الخوارزميّ (٧٨٧ – ٨٥٠) في بغداد، مؤلَّفه

الشهير **الكتاب المختصر في الجبر والمقابلة**. استُخدمت في هذا الكتاب كلمةُ "جبر" للدلالة على علمٍ رياضيّ جديد له مفاهيمه الرياضية المجرّدة ولغته التقنيّة الجديدةٍ المُدْخَلَة للتعبير عن العلاقات والعمليّات التي تحكم تلك المفاهيم. لم تخفَ أهمّيّةُ الحدث وعِظَمُ أبعاده عن المؤرخين والرياضيين وسائر أهل العلم، وذلك بغضّ النظر أكانوا قدماء أو

محدثين، ولم يتوانَ الرياضيّون حتّى ممّن عاصر الخوارزميّ، في شرحِ وتفسير كتابه. ومنهم مثلاً: عبد الحميد بن ترك، ثابت بن قرّة، سنان بن الفتح، أبو كامل (٨٥٠-٩٣٣م.)، أبو الوفاء البوزجانيّ.

أهمُّ ما يميّز كتاب الخوارزميّ من وجهة النظر المعرفيّة – المنطقيّة، يُختصرُ بما يلي:

١- إدخالُ الخوارزميّ لمفاهيمَ مجرّدةٍ جديدةٍ: "الجذر" أو "الشيء"؛ المال (مربع الشيء)...

٢- إخضاعُ المفاهيم المجرّدةِ الّتي أُدخلت لعملياتٍ جبريّة تُعمّم العمليّاتِ الحسابيّةَ المعروفةَ على المقادير والأعداد.

٣- الطرح الشموليُّ لأهداف هذا العلم بشكلٍ عمليّ، عَبْرَ تصنيّف المعادلات الجبريّة من الدرجة الثانية والأولى إلى ستّة

أصنافٍ، وإعطاء خوارزميّات الحلول لهذه المعادلات.

(I) $ax^2 = bx$,

(II) $ax^2 = c$,

(III) $bx = c,$

(IV) $ax^2 + bx = c$,

(V) $ax^2 + c = bx,$

(VI) $ax^2 = bx + c$

$(a,\ b, \ldots \in Q+^*)$

وبذلك يكون الخوارزميّ قد أعطى نموذجاً رِياضيّا مُبتكراً، يمتلكُ كلَّ مواصفات النظريّة الرياضيّة من حيث اللّغة الخاصّة وقواعد العلاقات الّتي تربط كائنات هذا النموذج فيما بينها.

ملاحظات حول كتاب الخوارزميّ:

أ- بغضِّ النظر عمّا يحتويه كتاب الخوارزميّ من حلولٍ للمعادلات وحساباتٍ وبراهينَ مبتكرةٍ، تتمحور أهمّيّتُه الكُبرى حول منهجيّته النظريّة الموحّدة، والهادفة إلى حلّ مجموعةٍ ضخمةٍ من المسائل باستخدام هذه المنهجيّة النظريّة.

(وهذه هي السِمة الأساسيّة للنظريّات العلميّة، حيث يُفترضُ بالنظريّة العلميّة أن تفسّرَ مجموعةً ضخمةً من الظواهر استناداً إلى مجموعةٍ من القوانين النظريّة المترابطة). يقول الخوارزميّ بهذا الصدد: "...توفير كتابٍ موجزٍ للناس يعالجون فيه مسائلَهم الحسابيّة ومبادلاتهم التجاريّة، وميراثهم، ومسحَ أراضيهم". فهدفُ الخوارزميّ إذن هو ابتكار نظريّةٍ

للمعادلات الّتي تُحَلُّ بالجذور، وذلك بغض النظر عن الأصول الحسابِيّة أو الهندسةِ أو غير ذلك لتلك المعادلات .

ب- أعطى الخوارزميُّ تعليلاتٍ هندسيّةً لحلوله الجبريّة "الخوارزميّة" المتعلّقة بالمعادلات من الدرجة الثانية ثلاثيّة الحدود، تُذَكِّرُنا بالكتاب الثاني لإقليدس. وتمتلك هذه "التعليلات الهندسيّة" أسبابَها ودوافعها المنطقيّة، وهي

بالطبع ليست وليدة عفويّةٍ لدى الخوارزميّ في عرض بنائه الرياضيّ. ونستطيع أن نورد الفرضيّات التالية الّتي تصلُح أن تشكّل أسباباً ودوافعَ معقولةً لهذا الأمر:

١- من الممكن أن يكون الخوارزميّ قد رمى من وراء ذلك إلى إظهار واختبار "شرعيّة" تطبيقه العمليّاتِ الحسابيّةَ على الكائناتِ الجبريّةِ المجرّدةِ المُدخَلة، مستعيناً بالأساليب

الهندسيّةِ الّتي توفّرُ إمكانيّةً جيدةً للتصوّر الملموس. إضافةً إلى احتمالِ قيامه بذلك بُغْيَةَ المقارنة بين الأسلوبَيْن الجبريّ والهندسيّ، وصولاً إلى إظهار أفضليّة الأسلوب الأوّل.

٢- من الممكن أن يكونَ الخوارزميُّ قد أراد "شَرْعَنَةَ" نظريّتِه (أي بلغةٍ حديثةٍ: إقامة الدليل على عدم تناقضها) وذلك عَبْرَ تأويلها هندسيّاً، أي بواسطة نظريّةٍ معروفةٍ آنذاك "لا

يُشَكّ بها". وهذا الأمرُ مهمٌّ أيضا لأنّ تعميم العمليّات الجبريّة على مفاهيمَ نظريّةٍ مجرّدةٍ مُدخَلةٍ قد يبدو غيرَ اعتياديٍّ ويُثيرُ الشكوكَ حول خَرْقِ مبادئ المنطق، وفي طليعتها مبدأ الهويّة ومتطلباته.

٣- من الممكن أن يكون الخوارزميُّ قد هدف إلى "إظهار" استقلاليّةِ العمليات الجبريّةِ والنتائجِ المترتّبة عليها عن طبيعة

الأشياء الّتي ترمز إليها (من أعدادٍ وأطوالٍ ومِساحاتٍ وحجوم)، وبِلُغةٍ أُخْرَى لربّما أراد الخوارزميُّ من خلال ذلك "تجريدَ المفاهيم الجبريّة" عن أصولها الملموسة، الهندسيّة وغيرها. وتجدر الإشارة هنا إلى أنّ عمل عمر الخيّام (١٠٤٨-١١٣١) نحا في الاتّجاه نفسه، عند معالجته لوَحْدَة القياس، ولكنّه ذهب أبعد من ذلك.

ج- من الملفت للنظر، أنّ الخوارزميّ يُدخلُ في لُغَةِ "جبره" مفهومَ "الشيء" و"المال"، علماً بأنّ هذا الأخير يَنْتُجُ من "الشيء" بتطبيقِ العمليّات الجبريّة (الضرب)؛ ولا يَتَعَدّى الخوارزميُّ بتحديده ذلك، ليُدخل بصورةٍ واضحةٍ مفهوم "الكعب" وما يليه من قِوَى أُخرى للمجهول. لا مكان هنا لمناقشة هذه التساؤلات ، ولكن، مهما كان

التفسيرُ فإنّه أقلُّ من كافٍ لاعتبار "جبر" الخوارزميّ مجرّد نظريّةٍ على المستوى الحدسيّ، وذلك أن مواصفات هذا الجبر تُبقيه، على الرّغم من كلّ شيءٍ، أقربَ بكثير إلى النظريّةِ العلميّة على "المستوى النظريّ الأوّليّ".

٢–٢ تطوّر الجبر في الشرق العربيّ حتّى الخيّام

جرى هذا التطوُّرُ على محورَيْن رئيسيّيْن: الجبر الحسابيّ و الجبر الهندسيّ. ومن الصعب هنا التوقّفُ عند كلِّ الرياضيّين الّذين اشتغلوا في هذا العلم، ولكنّنا سنحاول التوقّفَ قليلاً عند بعضهم:

نجد عند ابن ترك (القرن التاسع) نوعاً جديداً من البراهين الهندسيّة وتحليلاً أشملَ "لخوارزميّات" حلّ المعادلات من الدرجة

الثانية. كما أنّنا نجد عند ثابت بن قرّة (٨٣٦-٩٠١) براهين لقواعدَ حلّ المعادلات، الرابعة والخامسة والسادسة، استناداً إلى قضيّتي إقليدس الخامسة والسادسة، اللّتين وردتا في كتابه الثاني من الأصول، حيث يُعبَّر عن هاتين القضيّتين بلغةٍ حديثة كالتالي:

$$a.b+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\qquad (a+b).a+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2$$

وقد أعطى أبو بكر الكرجي (١٠١٠) حلّاً للمعادلات من

النوع

$$a.x^{2n+m} + b.\, x^{n+m} = c.x^m$$

من خلال ردّها إلى معادلات من الدرجة الثانية.

. وقد نال جبرُ المعادلات من الدرجة الثانية تطوّراً ملحوظاً في كتاب أبي كامل (٨٥٠-٩٣٠)، **كتاب الجبر والمقابلة**، حيث يُجري أبو كامل بسهولةٍ وبتقنيّةٍ عاليةٍ تحويلاتٍ مختلفةً

على العبارات الجبريّة غيرِ الـمُنْطَقَةِ، وقد خلا كتابُه الـمذكور من التطبيقـات الهندسـيّة. وكـان أبـو كامـل قـد كـرّس لهـذه التطبيقات مؤلفاً خاصّاً، تُستعملُ فيه الـمعادلاتُ الجبريّة من الدرجـة الثانيـة، لحـلِّ مسـائلَ مختلفـةٍ تتعلّـقُ بحسـاب عناصـرِ مُخمّس ومُعشّر الأضلاع المنْتَظِمَيْن المحاطَيْن أو الـمحيطَيْن بدائرة. ونجد لدى هذا الرياضي مثالاً مثيراً للاهتمام ، حيث يُخرق مبدأ التجانس الكلاسيكي. ويرمي المثلُ الـمذكورُ إلى حساب

ارتفاع مثلّثٍ متساوي الأضلاع، بحيث يكون مجموعُ مِساحتِه مع ارتفاعِه مساوياً لعشرة. تُفضي هذه المسألة إلى المعادلة التالية:

$$x^2 + \sqrt{3x^2} = \sqrt{300}$$

ويكون جذر المعادلة:

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

نرى بوضوحٍ هنا أنّ المفاهيمَ الجبريّة مستمرةٌ بالتحرّر شيئاً فشيئاً من أصولها الهندسيّة، لتصِلَ إلى القمّةِ في ذلك عند

الخيّام.

المعادلات من الدرجة الثالثة وما فوق

يقول عمر الخيّام في رسالتِه في *الجبر والمقابلة*: "إنّ أحدَ المعاني التعليميّة المُحتاج إليها في جُزءِ الحكمةِ المعروفِ بالرياضيّ هو صناعةُ الجبر والمقابلة، الموضوعةُ لاستخراج المجهولات العدديّةِ والمِساحيَّة، وإنّ فيها أصنافاً يُحتاجُ فيها

إلى أصنافٍ من المقدّمات مُعتاصةً[1] جداً، مُتعذِّرٌ حلُّها على اكثر الناظرين فيها. أمّا المتقدّمون فلم يصل إلينا منهم كلامٌ فيها، لَعَلَّهم لم يتفطنّوا لها بعدَ الطلب والنظر أو لم يَضْطَرَّ البحثُ إيّاهم إلى النظر فيها، أو لم يُنقل إلى لساننا كلامُهُم فيها. وأمّا المتأخرّون فقد عَنَّ للماهانيّ منهم تحليلُ المقدِّمَةِ الّتي استعملها أرشميدسُ مسلّمةً في الشكل الرابع من المقالة

[1] مشتقّة من كلمة "العَوَصُ" الّتي تعني نقيض الإِمكان واليُسْرِ

الثانية من كتابه *في الكرة والأسطوانةِ* — بالجبر، فتأدّى إلى كِعابٍ وأموالٍ وأعدادٍ مُتَعَادلةٍ، فلم يتّفقْ له حلُّها بعدَ أن أفكر فيها مَليّا. فجزم القضاءَ بأنّه مُمتنعٌ، حتّى نَبَغَ أبو جعفر الخازن وحلّها بالقُطوع المخروطيّة، ثم افتقر بعده جماعةٌ من المهندسين إلى عِدّة أصنافٍ منها، فبعضهُم حلَّ البعضَ، وليس لواحدٍ منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كلّ

صنفٍ منها والبرهان عليه كلامٌ يُعتَدُّ به، إلا على صنفين سأذكرُهما. وإنّي، لم أزل، كنتُ شديدَ الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييزِ الممكن من الممْتنع في أنواع كلّ صنفٍ ببراهينَ، لمعرفتي بأنّ الحاجة إليها في مشكلات المسائل ماسّةٌ جدّاً.."

نرى من كلام الخيّام، أن دراسة الماهانيّ (حوالى ٨٨٠

م.) الجبريّة لمسألة أرخميدس حول قِسمةِ الكُرَة بواسطة مُسْتَوٍ إلى قسمَين مُتناسبَين بالحجوم بقدرٍ معلوم، قد شكّلت نقطةَ انطلاقٍ لدراسة المعادلات التكعيبيّة. ومن المعروف أنّ العلماء العرب لم يكونوا على اطّلاع على حلول هذه المسألة الّتي وردت عند أرخميدس ومن لحِقَه من علماء اليونان. لقد عبّر الماهانيّ عن المسألة (بلغةٍ جديدة، هي

لغة الجبر: المعادلات) بمعادلةٍ جبريّة من النوع

التالي:

$$x^3 + b = a\,x^2$$

تمكّن لاحقاً عدّةُ رياضيّين من القرن العاشر، ومنهم الخازن

(القرن العاشر) وابن الهيثم (٩٦٥- ١٠٣٩) من إعطاء

تركيبٍ هندسيٍّ للمجهول عَبْرَ تمثيله (بلغة اليوم) كإحداثيّةٍ

سينيّةٍ لنقطة التقاء قَطعَيْن مخروطيَّيْن مُنتقَيَيْن بشكلٍ ملائم.
ومعروفٌ الآن، أنّ هذه الطريقة تعودُ إلى التقليد اليونانيّ (لقد استُعملت على وجه المثل من قِبل أدوكس في مسألة مضعافة المكعّب). وفي القرن العاشر، ووفق ما ورد عند الخيّام، قد جرى التعبيرُ بمعادلاتٍ من درجاتٍ مرتفعةٍ عن عددٍ من مسائل الهندسة، والفيزياء، وعلم المثلّثات. ومن

هذه المسائل مثلاً: (١) مسألة بناء قِطعةٍ كُرويّةٍ بحيث يكون حجمُها (أو مِساحتُها الكرويّةُ) معلوماً؛ (٢) مسألة إثلاث الزاوية؛ (٣) مسائل تركيب أضلاع مُخمّس ومُسبّع الأضلاع المنتظمَيْن... وتؤدّي كلُّ هذه المسائل، عند استعمالنا "لغةَ الخوارزميّ الجبريّة"، إلى ظهور معادلاتٍ من الدرجةِ الثالثة. وقد ظهرت معادلاتُ الدرجة الرابعة لأوّل مرةٍ

في التاريخ في كتاب *المناظر* لابن الهيثم، فقد أدّت إلى ذلك محاولةُ ابنِ الهيثم تحديدَ مكانِ انعكاس نقطةٍ مضيئةٍ على مرآة أسطوانيّةِ الشكل، بحيث يكون موضِعا العينِ والنقطةِ المضيئةِ معلومَيْن. وقد حلّ ابنُ الهيثم هذه المعادلةَ بتقاطعِ قَطْعٍ زائدٍ ودائرة.

لقد بلغت النجاحاتُ المحقّقةُ في مجال المعادلات

التكعيبيّة حدّاً كبيراً. وقد فتحت هذه التراكماتُ من المعلوماتِ البابَ أمام إمكانيّة بناء نظريّةٍ مُعمِّمةٍ للنتائج الملموسة. وهذا ما قام به بالفعل عمر الخيّام.

تجدر الإشارة إلى أن الخوارزمي لم يتطرّق مطلقاً من حيث المبدأ إلى المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة، وقد أُدخل مفهوم الكعب في لغته الجبرية لاحقا. والمعروف أن خلفاء الخوارزمي قد طوروا لغته الجبرية المتعلقة بالمجهول، يقول الخيام "وعادة الجبريين

أن يسمّوا – في صناعتهم – المجهول الذي يُراد استخراجه شيئاً، ومضروبه في مثله مالاً، ومضروبَ مالِه فيه كعباً، ومضروبَ ماله في مثله مالَ مالٍ، ومضروبَ كعبه في ماله مالَ كعبٍ، ومضروب كعبه في مثله كعبَ كعبٍ، وعلى هذا القياس بالغاً ما بلغ"

المفاهيم الملائمة وغير الملائمة، والبنية الجُزيئية للكائنات الرياضية على مثال مبرهنة منلاوس ومبرهنة الجيوب

يُعَــرِّفُ مــانالاوس في كتابِــه في الأُكَــرِ الزاويــةَ والــمُثَلَّث الكُــرَوِيَّيْن، بَيْــدَ أنّ مُبَرْهَنَتَــه الأساسـيَّةَ (الــمُسَمّاة الشَــكْل القطّاع) لا تتناولُ بِشَكْلٍ مُباشِر المثلّثَ الكُرَوِيَّ، إنّما تَتَعَلّقُ بِرُباعيٍّ أضلاع. واستِناداً إلى الـمُعطيات المِعْرِفِيَّةِ الراهِنَةِ، من البَديهِيِّ القَوْلُ إنّه ما كانَ لِرُباعِيِّ الأضلاعِ أن يُمَثِّلَ "الوَحْدَةَ البُنْيَوِيَّةَ" الفُضْلى في الاسْتِدلالِ الهَنْدَسِيِّ على بسيطِ الكُرَةِ، فالدَورُ الـمُلائمُ الأنسَبُ كانَ يَنْبَغي أن يَلْعَبَهُ المثلّثُ الكُرَوِيُّ،

لِكَوْنِه الشَكْلَ الجُزْئِيَّ البُنْيَوِيَّ الأبسطَ، فرُباعيُّ الأضلاعِ يَنْقَسِمُ مثلاً إلى مُثَلَّثَيْنِ اثنين. وهذا التَفاوُتُ البَيِّنُ الّذي يَكْتَسِبُ بِجَوْهَرِهِ أبعاداً فَلْسَفِيّةً ومَعرِفِيَّةً تتخطّى المَضْمونَ الرِياضِيَّ لتَطالَ الخواصّ البُنْيَوِيّةَ للكائنات الهندسيّة، قد صَحَّحَتهُ بالفِعْلِ البُحوثُ الحَثيثَةُ والنَتائجُ المُهِمَّةُ الّتي تَعودُ إلى هَنْدَسِيِّي التَقليدِ العِلْمِيّ العَرَبِيّ. ولربّما كان لهذا التَصْحيحِ أثرٌ أو صورةٌ أو أصلٌ ما لَدَى فلاسِفَةِ ذلك العَصْرِ من

الـمُهتمّين بالرياضيّات. وبالطبعِ، هـذا سؤالٌ مَطـروحٌ ينتظرُ الـردَّ عليه من خـلال بُحوثِ مُؤَرّخي الفلسَفَةِ العَرَبِيَّةِ آنـذاك.

لقد أفْضَت إذاً الطرائقُ الّـتي ابتَكَرَهـا رِياضِيّو وفَلَكِيّو الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ، في مَعْـرِضِ حِسـاباتِهِم للقِسـيِّ المجهولـةِ علـى بسـيطِ الكُـرَةِ، فضلاً عمّا راكموه من معلوماتٍ في هـذا المجالِ، إلى عَمَلِيَّةٍ انشطاريّةٍ نوعِيَّةٍ تَمَثَّلَت نتيجتُها بظهورِ علمٍ جديدٍ ألا وهـو عِلْـمُ الـمُثَلَّثات، الّـذي يَرْتَكِـزُ بِمَضـمونه علـى مُبَرْهَنَـةِ

الجيوب (الشَكْل الـمُغْني)[٦] وعلى الـمُثَلَّث الكُرَوِيّ "كَوَحْدَةٍ بنيَوِيَّةٍ" للاستدلالِ الهَنْدَسِيّ على البسيطِ الكُرِيِّ. ونحن نعلمُ اليومَ أنّ الهَنْدَسَةَ اللاإقليديَّةَ ذات الانحناءِ السلْبِيّ الثابِتِ قد اكتُشِفَت نتيجةَ أبحاثٍ مُسْتَقِلَّةٍ لثلاثةِ عُلَماء وهم

[٦] انْظُرْ ما يُورِدُه البيرونيُّ بِصَدَدِ ذلك، مَثَلاً، في كتابِ ديبارنو (ص. ١١١):
Marie-Thérèse Debarnot, dans *Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a.* Institut Français de Damas. Damas, 1985.

"طريق أبي نصر في الشَكْلِ المُغني من رسالته إليّ: نسبة جُيوب الأضلاع في المثلّث الكائن من قسيٍّ عظامٍ على سطح الكرة، بعضُها إلى بعض، على نسبة جيوب الزوايا التي تقابلُها، بعضُها إلى بعض، النظيرُ إلى النظير..."

لوباتشيفسكي وبولاي وغاوس، والمُلْفِتُ أنّ الأمرَ نفسَهُ قد حدَثَ عِنْدَ اكتشافِ مُبَرْهَنَةِ الجيوبِ في أبحاثِ أبي نصرٍ بنِ عراق وأبي محمود الخُجَنْدِيّ وأبي الوفاءِ البوزجانيّ.

تَخَطَّى عُلَماءُ الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ إذاً مُبَرْهَنَةَ مانالاوس، فاكتَشَفوا قاعِدَةَ الجيوب الّتي سُمِّيَت آنذاك "الشَكْل المُغْنِيّ". وعلى طريقِهم نحو اكتِشافِ هذه القاعدَةِ، استَخْدَموا تِقَنِيّةَ المُثَلَّثِ القُطْبِيِّ الّذي مَثَّلَ استِخْدامُه في براهينهم أهَمِيَّةً قُصْوَى، نَظَراً

لارتباطِـهِ المباشِـرِ بأكثَـر المبـادئ رسـوخاً في الاسـتِدلالاتِ العِلميَّةِ اللاّحِقة، ألا وهو مبدأ الثنائِيّة.

لقـد شَـكَّلَ اكتشـافُ مُبَرْهَنَـةِ الجيوبِ حَجَرَ الزاوِيَـةِ في بَلْـوَرَةِ عِلْـمِ الهَنْدَسَـةِ الكُرَوِيَّـةِ وعِلْـمِ الـمُثَلَّثاتِ كنَظَـرِيّتَيْن رِياضِـيَّتَيْنِ مُلائِمَتَـيْنِ يُقـارِبُ مُسْـتواهُما المعْـرِفِيُّ "الـمُسْتَوَى النَظَـرِيَّ" الـمُتَقَدِّم. كمـا مَهَّـدَ هـذا الاكتشـافُ إلى انشـطارٍ لاحِـقٍ مُكتَمِـلٍ عـن الهَنْدَسَـةِ الإقليديّـة. وتتمَحـورُ القيمـةُ المعْرِفِيَّـةُ

الرِياضِيَّةُ المُتَرَتِّبَةُ على هذا الاكتشافِ حول النقاطِ الاساسِيّةِ التالية:

١- تُوَفِّرُ مُبَرْهَنَةُ الجيوبِ إمكانيّةَ الاسْتِنْباطِ الجَوْهَرِيِّ (intrinsèque) في استدلالاتِنا حول ما نُصادِفُه من مسائلَ على بسيطِ الكُرَةِ، وذلك دون العَوْدِ إلى هَنْدَسَةِ الفَضاءِ الخارجيِّ إي إلى هَنْدَسَةِ إقليدس. كما أنّها تُعَبِّرُ عن اللامُتَغَيِّرِ الأكثر شُمولِيَّةً وعُمْقاً في البُنْيَةِ الهَنْدَسِيّةِ للبسيطِ الكُرِيِّ.

٢- تُغْـني هـذه الـمُبَرْهَنَةُ عـن اسـتخدامِ الوسـائلِ التَرْكيبِيَّـةِ والأبْنِيَةِ المُضافَةِ الّتي كان لا مَفَرَّ منها عِنْدَ استخدامِ مُبَرْهَنَةِ منالاوس في الاستدلال.

٣- تُلائـم هـذه الـمُبَرْهَنَةُ الكائنـاتِ الهَنْدَسِـيّةَ الكُرَوِيَّـةَ لأنّهـا تتّخـذُ المثلّثـاتِ كَوَحْـدَةٍ مُكوّنِـةٍ، وذلـك خلافـاً لـمُبَرْهَنَة مـانالاوس الّـتي تتبـنّى رباعـيَّ الأضـلاع التـامَّ في العمليّـات الهَنْدَسِيّة. وغالِبـاً مـا يُمَكّنُنـا هـذا الـتَلاؤمُ عَبْـرَ تَطْبيـقِ مُبَرْهَنَـةِ

الجُيوبِ من تَحديدِ الكائنِ الكُرَوِيِّ بِمُقارَبَةٍ يكون استِثْناؤها تَقايُساً.

٤- تَعْكِسُ هذه الـمُبَرْهَنَةُ بِجَوْهَرِها قانوناً طبيعيّا، وليس رِياضِيّاً فحسب، وهو قانون الثُنائِيَّةِ بين الكائناتِ الرِياضِيَّة.

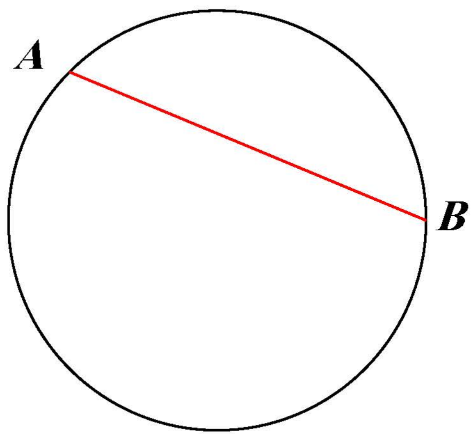
٥- تَفْتَحُ هذه الـمُبَرْهَنَةُ الدَرْبَ واسِعاً أمامَ تَطْبيقِ الطُرُقِ التَحْليلِيَّةِ لِللاّمُتناهِيَةِ في الصِغَرِ وذلك نَظَراً لِتَوْفيرِها إمكانيّةَ مُقارَبَةِ الأشكالِ الـمُنْحَنِيَةِ الإحاطَةِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ

بواسِطَةِ أشكالٍ مُسْتَقيمَةِ الإحاطَةِ، وهذا ما نَجِدُه بالفِعْلِ عِنْدَ ابنِ الهيثم في مَعْرِضِ حِساباتِهِ التَحْليلِيَّةِ لِلحُجومِ والمِساحات

بعض المصطلحات والمبرهنات

تحديد١ : **وَتَرُ القَوْسِ** هو القطْعةُ المُسْتَقيمَةُ الّتي تَصِلُ طَرَفَيْها.

$$crd(arc(AB)) = sgm(AB)$$



(*crd* يَرْمُزُ إلى وَتَرِ القَوْسِ)

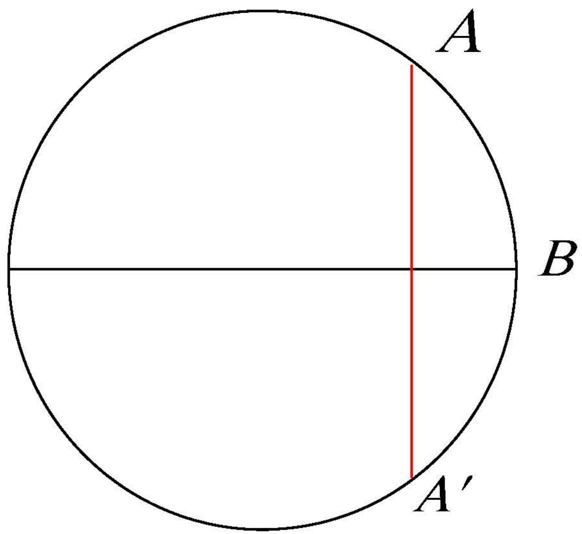
(*arc* يَرْمُزُ إلى القَوْسِ)

(*sgm* يَرْمُزُ إلى القطْعةِ المُسْتَقيمَةِ)

تحديد٢ : نَظيرُ القَوْسِ هو وَتَرُ ضِعْفِها.

$$hom(arc(AB)) = crd(2.arc(AB)) = sgm(AA')$$

(*hom* يَرْمُزُ إلى نَظيرُ القَوْسِ)



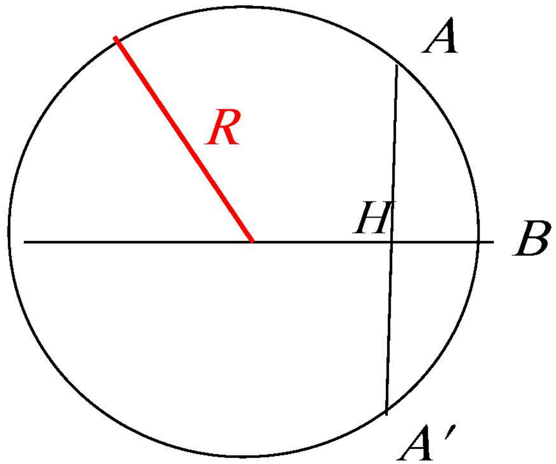
تحديد٣ : جَيْبُ القَوْسِ هو نِصْفُ وَتَرِ ضِعْفِها.

$$Sin(arc(AB)) = crd(2.arc(AB))/2$$
$$= sgm(AH) = hom(arc(AB))/2$$
$$= R.\ sin(arc(AB)).$$

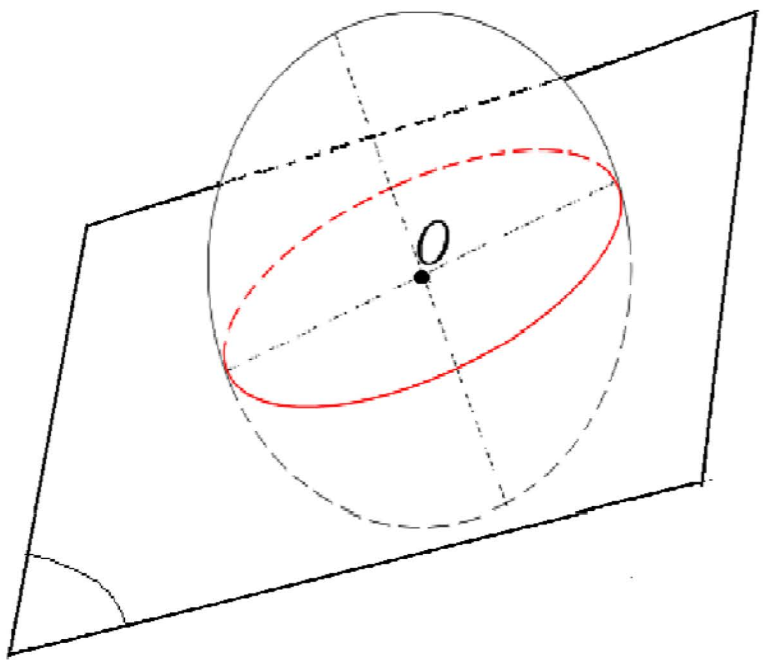
(الحَرْفُ R يَرْمُزُ إلى نِصْفِ قُطْرِ الدائِرَة)

(sin يَرْمُزُ إلى الجَيْبِ بالمَعْنَى الراهِن)

(Sin يَرْمُزُ إلى الجَيْبِ بالمَعْنَى القديم)



تحديد ٤ : الدائِرَةُ العظيمةِ في الكُرَةِ، هي دائِرَةٌ تَحْدُثُ عن تَقاطُعِ الكُرَةِ مع سَطْحِ مُسْتَوٍ يَمُرُّ بِمَرْكَزِها.



قال مانالاوس: الشَكْلُ الّذي أُسَمِّيَهُ ذا ثَلاثَةِ أضْلاع مِنَ الأشْكالِ الَّتي في بَسيطِ الكُرَةِ، هُوَ الّذي تُحيطُ بِهِ ثَلاثُ قِسِيٍّ مِنْ دَوائِرَ عِظامٍ، كُلُّ قَوْسٍ مِنْها أقلُّ مِنْ نِصْفِ دائِرَةٍ وزَواياهُ هِيَ الَّتي تُحيطُ بِها تِلْكَ القِسِيُّ لِيَحْصُلَ السَطْحُ الواحِدُ المُثَلَّثُ وتُحيطُ بِهِ القِسِيُّ المَذْكورَةُ.

والزَوايا الَّتي أُسَمِّيها زَوايا مُتَساوِيَةً يُحيطُ بِها دَوائِرُ عِظامٌ، هِيَ الَّتي تَكونُ قِسِيُّ مَيْلِ أنْصافِ دَوائِرِها مُتَساوِيةً، أي القَوْسُ الَّتي بَيْنَ الدائِرَتَيْنِ مِنَ الدائِرَةِ <الَّتي> تَمُرُّ عَلَى قُطْبَيْهِما

بسم الله الرحمن الرحيم وبه العصمة والتوفيق

كتاب مانالاوس من اصلاح الامير ابي نصر

منصور بن عراق رحمه الله عليه

قال مانالاوس الشكل الذي اسميه ذا ثلاثة اضلاع من الاشكال التي في بسيط الكرة هو الذي يحيط به ثلاث قسي من دوائر عظام كل قوس منها اقل من نصف دائرة وزواياه هي التي يحيط بها تلك القسي ليحصل السطح الواحد المثلث ويحيط به القسي المذكورة والزوايا التي اسميها زوايا متساوية يحيط بها دوائر عظام هي التي تكون قسي من انصاف دوائر بها متساوية اي القوس التي من الدائرتين من الدائرة تمر على قطبها

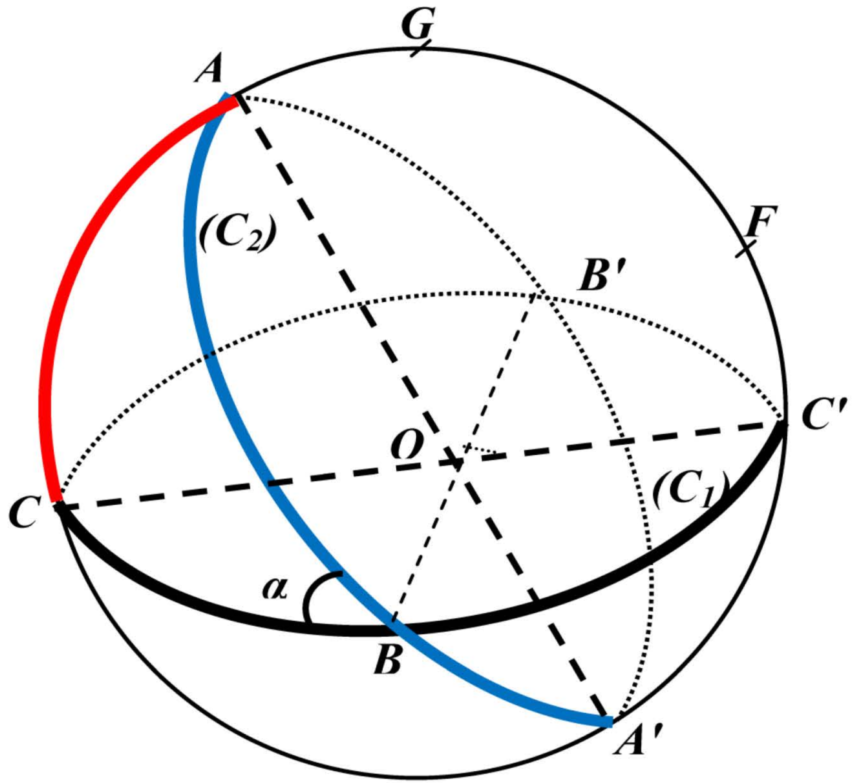


Fig. 1

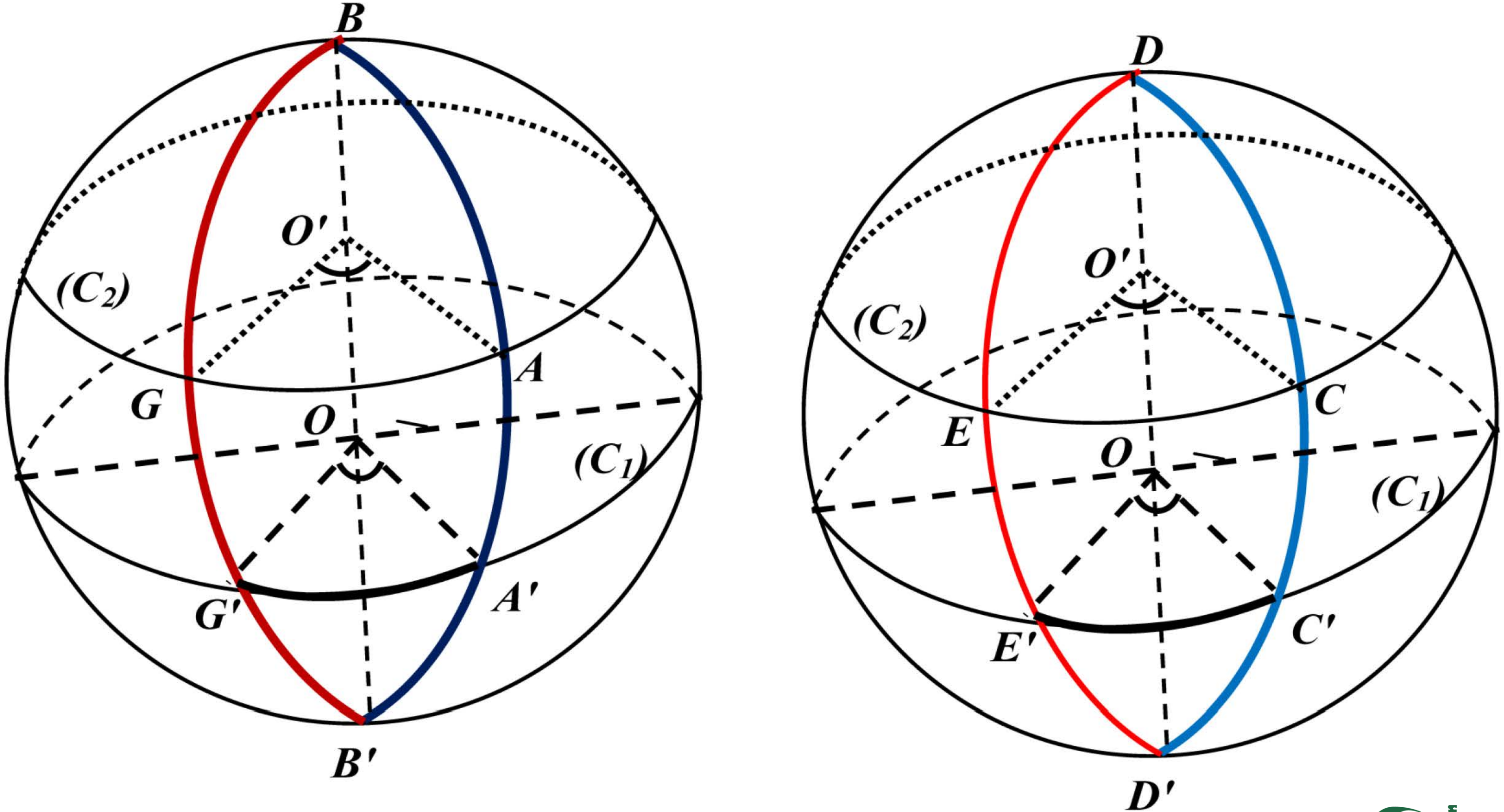
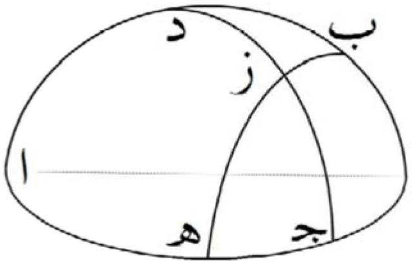


Fig. 2

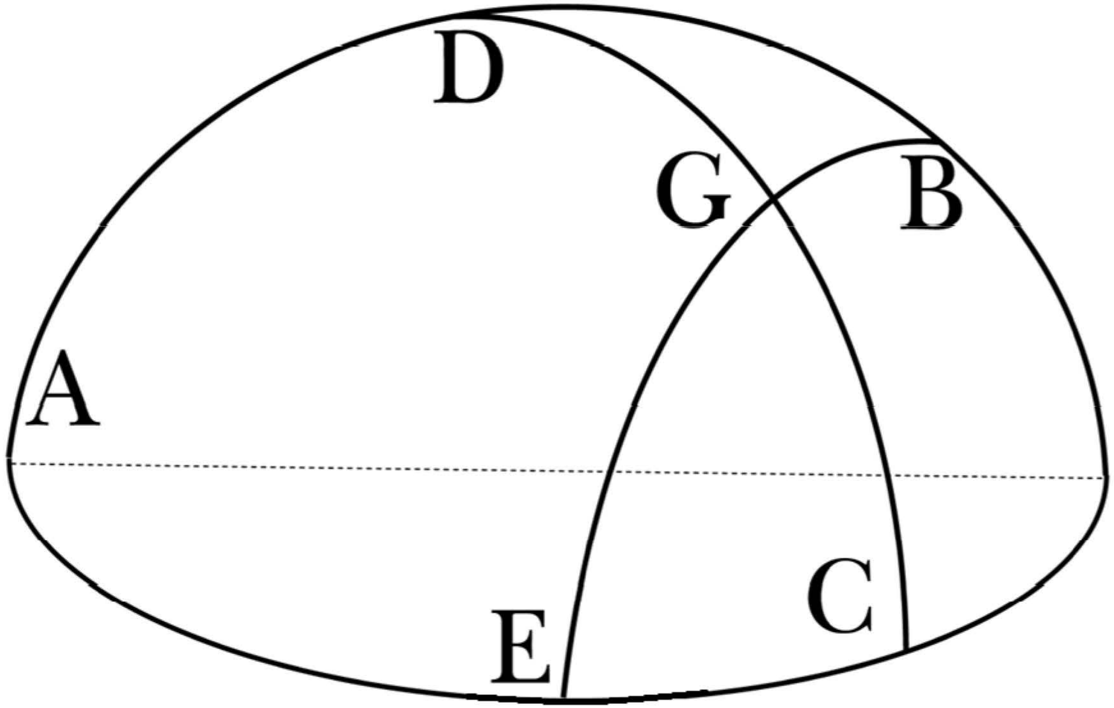
مُبَرْهَنَةُ مَانَالاوس (الشَكْلُ القَطّاع)



"الشَكْلُ الأوّلُ:

قوسا جـ ه ب د تَلْتَقِيانِ على نُقْطَةِ اَ، وأُخْرِجَ مِنْ نُقْطَتَي جـ ب قَوْسا جـ د ب ه مُتَقاطِعَتَيْنِ على نُقْطَةِ زَ، وكُلُّ واحِدَةٍ من القِسيّ الأرْبَعِ مِنْ مُحيطِ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ في الكُرَةِ، وكُلُّ واحِدَةٍ مِنْها أصْغَرُ مِنْ نصْفِ المُحيطِ. فأقولُ إنّ نسْبَةَ جَيْبِ جـ ه إلى جَيْبِ ه ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ ز إلى جَيْبِ قَوْسِ ز د <ومِنْ نسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب د إلى جَيْبِ قَوْسِ ب ا>".

$$\frac{Sin(arc(CE))}{Sin(arc(EA))} = \frac{Sin(arc(CG))}{Sin(arc(GD))}\frac{Sin(arc(DB))}{Sin(arc(BA))}$$



•Théorème de Ménélaüs (*Figure « secteur »*)

1) $$\frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{AB}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{BE}} = \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{AD}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{DF}} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{FC}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{CE}},$$ (*Synthèse,* تركيب)

, *(Sin x = R. sin x)*

2) $$\frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{AE}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{BE}} = \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{AF}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{FD}} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{DC}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{CB}}.$$ (*Diérèse,* تفصيل)

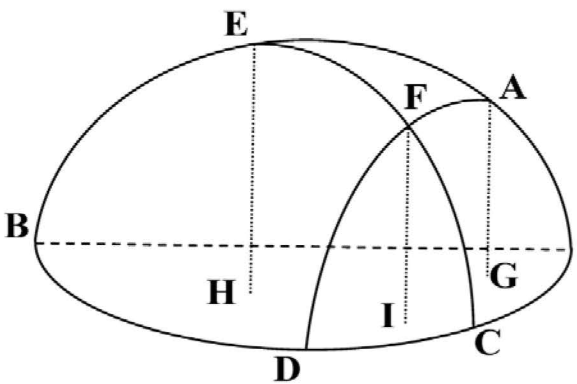


Fig. 2

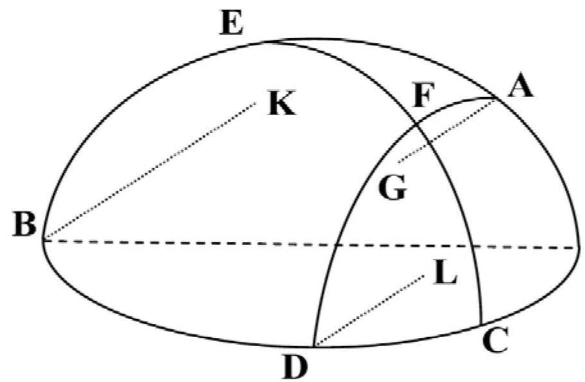
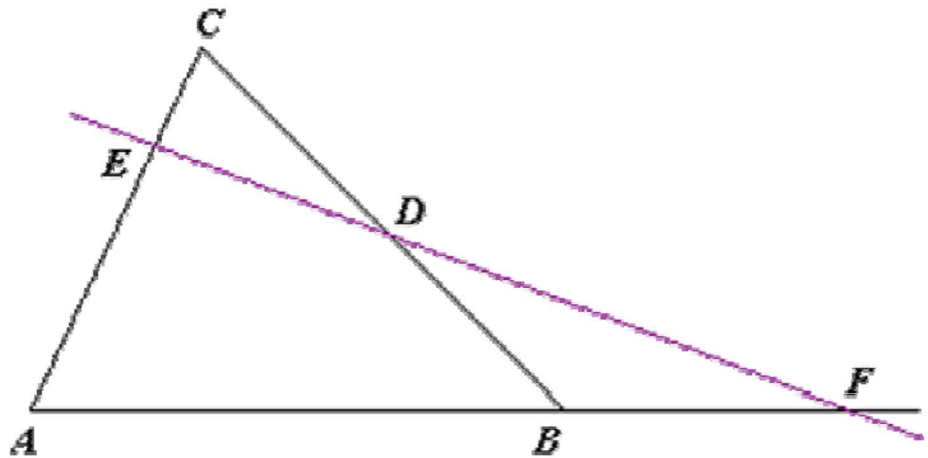


Fig. 3

مبرهنة مانالاوس في السطح المستوي



$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

مبرهنة الجيوب (الشكل المُغْنيّ)

" طَريقُ أبي نَصْرٍ في الشَكْلِ المُغْنيّ مِنْ رِسالَتِهِ إليِّ :
نِسْبَةُ جُيوبِ الأَضْلاعِ في المُثَلَّثِ الكائِنِ مِنْ قِسِيٍّ عِظامٍ على سَطْحِ الكُرَةِ، بَعْضها إلى بَعْض، على نِسْبَةِ جُيوبِ الزوايا الّتي تُقابِلُها، بَعْضها إلى بَعْض، النَظير إلى النَظير... " (البَيْرونيّ، *مَقاليدُ عِلْمِ الهَيْئَة*)

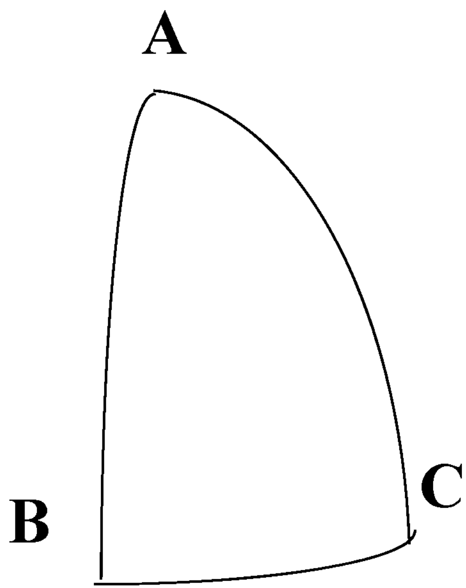
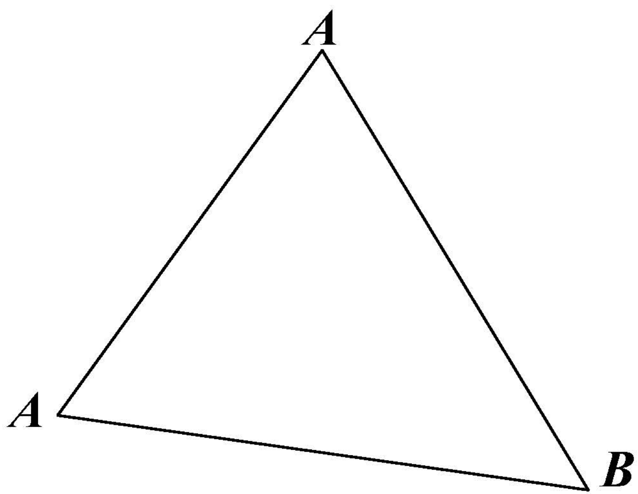


Figure 0

$$\frac{Sin\ \widehat{A}}{Sin\ \overset{\frown}{BC}} = \frac{Sin\ \widehat{B}}{Sin\ \overset{\frown}{AC}} = \frac{Sin\ \widehat{C}}{Sin\ \overset{\frown}{AB}}$$

مبرهنة الجيوب في السطح المستوي

$$\frac{Sin\widehat{A}}{BC}=\frac{Sin\widehat{B}}{AC}=\frac{Sin\widehat{C}}{AB}$$



Mohamad Youssef AL-HOUJAIRI **Tripoli-Liban, le 30/ 03/ 2016**

Titres Scientifiques :

1- Doctor of philosophy (Ph.D) in physics and mathematics». Spécialité : logique mathématique, algèbre et théorie des nombres, Académie Soviétique des Sciences (Section de Moldavie), 1987.

2- Docteur d'épistémologie d'histoire des sciences et de techniques. Paris 7, France, 2005.

Titres administratives :

1- Maître des Conférences – Département: Tronc Commun, Faculté de Génie, Université Libanaise, Tripoli – Liban.

2- Secrétaire de la Société Libanaise d'Histoire des Sciences.

3- Coordinateur scientifique de *l'Équipe d'Étude et de Recherche sur la tradition scientifique arabe (ERTSA)* – Équipe associée au CNRS-Liban.

Tel.: 00-961-6-205 192 ; 00- 961-3-70 40 68, Télécopie: 00-961 6 385 089.

E-mail: houjairi@hotmail.com

CURRICULUM VITAE

ÉTAT CIVIL ET FONCTION ACTUELLE

Nom	: AL-HOUJAIRI
Prénom	: Mohamad
Date de naissance	: 08/03/1956
Lieu de naissance	: ʿArsal, Caza Baalbeck, Liban
Nationalité	: Libanais
État civil	: Marié, 4 enfants
Adresse personnelle	: Tripoli – Liban-Nord, Rue Al-Miten, Imm. «Centre du Stade public», 1er étage.
Tél. (personnels)	: 00-961-3-70 40 68 & 00-961-6- 205 192
Télécopie	: 00-961-6-385-089
E-mail	: houjairi@hotmail.com
Fonction actuelle	: Maître des Conférences
Établissement	: Université Libanaise – Faculté de Génie1 – Tripoli, Liban-Nord.
Tél.	:00-961-6-385 088 ; Télécopie : 00-961-6-385 089

EXPÉRIENCE DANS L'ENSEIGNEMENT UNIVERSITAIRE

•De septembre 1988 jusqu'au septembre 1999 : contractuel à plein temps à l'Université Libanaise – Faculté de Génie 1 – Tripoli, Liban-Nord.

① Cours enseignés à la Faculté de Génie -1: Analyse mathématique I (1988-2014) ; Analyse mathématique II (1988-2014) ; Analyse mathématique III (1988-1994, 2008) ; Analyse mathématique IV (1988-1994, 2008) ; Géométrie différentielle (1988-2014) ; Algèbre I (1994-1995) et Algèbre II (1993-1994) ; Probabilités et statistiques (1989-1991).

② Cours enseignés à la Faculté des Sciences III: Algèbre structurelle ; Analyse mathématique (1989-1990).

③ Cours enseignés à l'Université Libanaise - Faculté des Lettres III – Section de philosophie: Introduction à la logique (1990-1992).

④ Cours enseignés à l'Université Libanaise - Faculté de Droit et des Sciences Politiques et Administratives III: Statistique descriptive (1996-1997).

•Depuis septembre 1999 jusqu'à présent: Maître de conférences, cadré à la Faculté de Génie 1 de l'Université Libanaise.

TITRES UNIVERSITAIRES

① De 1976 à 1982 : diplôme «Master of Science in Physics and Mathematics» de spécialité «Mathématiques» avec mention «excellent», Université de l'Amitié des Peuples, Moscou, U.R.S.S.

② En 1982 : Qualification de «Professeur des Mathématiques dans les écoles supérieures et secondaires» Université de l'Amitié des Peuples, Moscou, U.R.S.S.

③ De 1982 à 1987 : diplôme «DOCTOR OF PHILOSOPHY (Ph.D) IN PHYSICS AND MATHEMATICS», de spécialité : Logique mathématique, algèbre et théorie des nombres, Académie Soviétique des Sciences (Section de Moldavie).

Titre de la thèse: «ALGÈBRES DE BOL DES COUPLES INVOLUTIFS DE RANG 1»

④ En 2005 (le 22 juin) soutenance d'une deuxième thèse doctorale -Université Paris 7-Denis Diderot-. Version de diplôme : DOCTORAT DE PARIS 7 - Épistémologie, Histoire des Sciences et Techniques. Titre des travaux : L'Encyclopédie d'Ibn Hūd : Les commentaires d'Ibn Hūd de Saragosse (XI^{e} siècle) des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. Direction de Roshdi Rashed. Mention : très honorable avec félicitations du jury.

PUBLICATTIONS SCIENTIFIQUES

A) <u>ARTICLES SCIENTIFIQUES</u>

1. *Algèbres de Bol, associées aux couples symétrique so(n+1)/so(n). Collection "Matériaux de la 7ème conférence des jeunes savants". Issue de 12 juillet 1984 ; pp. 16-18. Institut de l'information scientifique et technique de l'U.R.S.S. (en russe).*

2 *Les algèbres de Bol, associées aux espaces de courbure constante. Journal: "Problèmes des tissus et des quasi-groupes". Issue de 1985 ; pp. 20-25. Édition de l'Université de Kalinin. (en russe).*

3 *Algèbres de Bol, associées aux couples symétriques su(n+1)/s(u(n) ⊕ u(1)). Collection "Travaux de la 8ème conférence des jeunes savants". Série Math. Ph. Ch. Issue du 25 mai 1985 ; pp. 179 -182. Institut de l'information scientifique et technique de l'U.R.S.S (en russe)*

4 *Algèbres de Bol, associées aux couples symétriques sp(n+1)/sp(n) ⊕ sp(1).Collection "Travaux de la 9ème conférence des jeunes savants". Série Math. Ph Ch. Issue du 25/9/86 ; pp.9-11. Institut de l'information scientifique et technique de l'URSS (en russe)*

5 *Algèbres de Bol, associées aux couples involutives su(n+1)/s(u(n) ⊕ u(1)), sp(n+1)/sp(n) ⊕ sp(1), f_4/so(9). Journal " Tissus et quasi-groupes. Université d'État de Kalinin. Issue de 1987 ; pp 10-13. (en russe)*

6 *AL-HOUJAIRI Mohamad, FARÈS Nicolas. Classification des systèmes triples de Lie de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. Journal Scientifique Libanais, vol.4, N 1, 2003, pp.129-137.*

7 AL-HOUJAIRI Mohamad, Système numérique de la mécanique déterministe, Journal Scientifique Libanais, vol.4, N 2, 2003, pp.87-93.

8 AL-HOUJAIRI Mohamad, Les géométries non euclidiennes et le cinquième postulat. Dans le Livre Recherches sur la tradition scientifique arabe; actes de la «Rencontre Syro-libanaise de Recherche sur la tradition scientifique arabe». Publication de l'Université Libanaise, section des études historiques, XLVI, Beyrouth, 2004 (en arabe)

9 AL-HOUJAIRI Mohammed, Déterminisme et conventionnalisme dans la construction des systèmes numériques. Dans le livre « De Bagdad à Paris, Hommage à Roshdi Rashed », édité sous la direction de Régis Morelon et Ahmad Hasnaoui, Paris 2006, Institut du Monde Arabe.

10 AL-HOUJAIRI Mohamad, Sur quelques théorèmes sphériques dans le livre d'al-Istikmāl d'Ibn Hūd. Dans le livre « L'histoire des sciences arabes, Interaction scientifique des cultures », Beyrouth - Liban 2007.

11 Roshdi Rashed et Mohamad Al-Houjairi, "Sur un théorème de géométrie sphérique: Théodose, Ménélaüs, Ibn 'Irāq et Ibn Hūd", Arabic Sciences and Philosophy, vol. 20, N° 2, 2010, p. 207-253.

12 M. Bernard, N. Moubayed, M. Al-Houjairi, "A Survey on the periodic Hyperbolic Functions". A.M.S.E. Advances in Modelling & Analysis, A Mathematical, 2011 – Vol. 48, N° 2, pp 15-26.

13 *Mohamad Al-Houjairi*, "Sur les commentaires des théorèmes III-1 ET III-22 de Ménélaüs dans al-*Istikmāl* d'Ibn Hūd". Actas de la Academia Nacional de Ciencias, Cordoba - Republica Argentina, 2012, tomo xv, pp 11-25.

14 *Mohamad Al-Houjairi*, "Sur l'histoire du cinquième postulat d'Euclide". J. Handassa, Order of engineers & architects of Tripoli – scientific comittee. July, 2012, pp. 38-47. (En français).

15 *Mohamad Al-Houjairi*, "L'algèbre d'al-Khawarizmi comme exemple de formation des théories mathématiques". J. Handassa, Order of engineers & architects of Tripoli – scientific comittee. July, 2013, pp. 24-27. (En arabe).

16 *Mohamad Al-Houjairi*, "Sur le théorème de Ménélaüs et ses applications dans les *Sphériques* de *l'Istikmāl* d'Ibn Hūd". Dans le livre : Circulation des savoirs autour de la Méditerranée. Firenze, Edizioni Cadmo, 2013, pp. 43-86.

17 *Mohamad Al-Houjairi* and *Bassam El-Eter*, "Identification of monoparametric families of a remarkable complex Bol algebra class, generated by the symmetric space *g_2/so4" AMSE Journals –2014-Series: Advances A; Vol. 51; N° 1; pp 59-79.*

B) LIVRES PUBLIÉS

1 *AL-HOUJAIRI M., «Analyse mathématique I. Fonctions réelles d'une seule variable. Recueil d'exercices et de problèmes avec rappel de cours». Tripoli - Liban, 1993. Éditions M.C.G. 175 pages; (en français)*

2 *AL-HOUJAIRI M., MOUKADDEM. N., «Analyse mathématique II. Fonctions de plusieurs variables réelles. Recueil d'exercices et de problèmes avec rappel de cours». Tripoli-Liban, 1994. Editions M.C.G. 415 pages; (en français).*

3 *AL-HOUJAIRI M., ZIADÉ M., «Les Bases de l'Analyse. Corps $\mathbb{R}$. Suites Numériques réelles». Tripoli-Liban, 1998. Editions M.C.G. 256 pages; (en français).*

4 *AL-HOUJAIRI M., EL-ETER B. Introduction à la théorie des probabilités. Cours et Exercices Résolus. Tripoli - Liban, 1999. Éditions DAR EL-CHIMAL. 420 pages; (en français).*

5 *AL-HOUJAIRI M., FARÈS N. Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe. Actes de la "Rencontre Syro-Libanaise de Recherche sur Tradition Scientifique Arabe", Beyrouth, 20-21 janvier 2000. Publications de l'Univ. Libanaise, Section des études historiques XLVI, Beyrouth, 2004.*

C) RÉSUMÉS DES RECHERCHES

1) AL-HOUJAIRI Mohamad, FARÈS Nicolas. Classification des systèmes triples de Lie de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. Abstracts of «The 13th Science Meeting». Liban, November 2-3, 1999, pp.156 .

2) AL-HOUJAIRI Mohamad. «Histoire des géométries non euclidiennes et cinquième postulat d'Euclide». Rencontre Syro-Libanaise de Recherche sur le Patrimoine Scientifique Arabe, Beyrouth, 20 et 21 janvier 2000.

3) AL-HOUJAIRI Mohamad. «Déterminisme et conventionnalisme dans la construction des systèmes numériques». Colloque international, Damas, lundi 15 – mardi 16 mai 2000. Organisé par l'Institut français d'Études Arabes de Damas (IFEAD).

5) AL-HOUJAIRI Mohamad. «L'école scientifique de Sharaf aldeen al-toussi» «40th SCIENCE WEEK – Celebration of The Arab Scientist SHARAF ALDEEN AL-TOUSSI». Syria – Auditoria of The University of Tachreen, 4 – 9 November 2000.

6) AL-HOUJAIRI Mohamad. «Histoire des géométries non-euclidiennes et du cinquième postulat d'Euclide» Colloque international «Sciences et Philosophie arabes: méthodes, problèmes et cas ». Carthage, 28 novembre – 2 décembre 2000. Carthage, Beït Al-Hikma. Organisé par la Société internationale d'histoire des sciences et des philosophies arabes et islamiques (S.I.H.S.P.A.I.) et l'Académie tunisienne des sciences des lettres et des arts.

7)) AL-HOUJAIRI Mohamad. «Les racines des géométries non-euclidiennes et les essais de démonstration du cinquième postulat», Colloque annuel XXII sur l'histoire des sciences arabes, Alep 23-25 septembre 2001, Institut de patrimoine scientifique arabe.

8) AL-HOUJAIRI Mohamad « Sur quelques théorèmes de la géométrie sphérique du livre d'al-Istikmāl d'Ibn Hūd ». Colloque international « Les Sciences Arabes et La Modernité Classique en Europe, Damas, 2-4 novembre 2002 », Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologies - Barzé. Ambassade de France en Syrie – Service de Coopération et d'Action Culturelle.

9) AL-HOUJAIRI Mohamad « Sur quelques problèmes de la géométrie sphérique du livre d'al-Istikmāl d'Ibn Hūd ». Colloque « Fourth Conference : The Role of the Arab Moslem Science on the Western Scientific Achievements» Irbed - Jordanie 14-16 décembre 2002. Colloque organisé par la Société jordanienne d'histoire des sciences.

10) AL-HOUJAIRI Mohamad « Sur la géométrie sphérique dans le livre encyclopédique d'IBN HŪD» Colloque international « Identité culturelle des sciences et des philosophies arabes : auteurs, œuvres et transmissions», Namur-Bruxelles, 15-18 janvier 2003. Colloque organisé par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Belgique (Fondation Ochs-Lefebvre) et par la Société Internationale d'Histoire des Sciences et des Philosophies arabes et islamiques (SIHSPAI)

11) AL-HOUJAIRI Mohamad. «L'empreinte de Ménélaüs dans quelques théorèmes sphériques d'ibn Hūd (partie 1) », Colloque annuel XXIV sur l'histoire des sciences arabes, Alep 21-23 octobre 2003, Institut de patrimoine scientifique arabe.

12) AL-HOUJAIRI Mohamad, «L'empreinte de Ménélaüs dans quelques théorèmes sphériques d'ibn Hūd (partie 2)», Colloque ''Fifth Conference of Jordanian Society for the History of Science : « Abu Bakr Mohammad Ibn al-Hassan Al-Kraji »'', Amman – Jordan, 2 – 3 october 2004.

13) AL-HOUJAIRI Mohamad «Sur le théorème de Ménélaüs et ses applications dans les Sphériques de l'Istikmāl d'Ibn Hūd ». VII^e Colloque international de la «société internationale d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Islamiques ». Florence, 16-18 février 2006, Facoltà di Scienza della Formazione, via del Parione 7.

14) AL-HOUJAIRI Mohamad. « Sur une proposition sphérique remarquable de l'Istikmāl d'Ibn Hūd » Colloque international « La Démonstration de l'antiquité à l'âge classique ». Paris, 3-6 juin 2008, Université Paris, U.F.R. de Philosophie.

15) AL-HOUJAIRI Mohamad. « Sur un problème d'extrema des *Sphériques* de Théodose d'après un texte d*e l'Istikmāl d'Ibn Hūd* ». Colloque International« Histoire et Philosophie des mathématiques et disciplines associées en Méditerranée », Aix Marseille Université - Ceperc (UMR 7304), 4-6 novembre 2015.

LANGUES

- Arabe : langue maternelle
- Français : langue d'étude
- Russe : langue d'étude
- Anglais : niveau passable.

AUTRES ACTIVITÉS

1- Participation à la réforme des programmes de la Faculté de Génie de l'Université Libanaise.

2- Participation à la réforme des programmes de l'Enseignement Technique et Professionnel.

3- Membre de l'Équipe d'Étude et de Recherche sur la Tradition Scientifique. Coordinateur du comité scientifique de l'équipe.

4- Participation à l'École de C.I.M.P.A. (Centre International de Mathématiques Pure et Appliquée, Nice, France) qui a eu lieu en Égypte (du 23 janvier au 7 février 1999)

5- Membre de Comité Scientifique de la Rencontre Syro-Libanaise de Recherche sur le Patrimoine Scientifique Arabe (Beyrouth, 20 et 21 janvier 2000). Chargé officiellement de la rédaction et de l'édition du livre contenant les travaux scientifiques de la «Rencontre Syro-Libanaise de Recherche sur le Patrimoine Scientifique Arabe». Le livre *Recherches sur la tradition scientifique arabe* est édité (Publications de l'Université Libanaise, Section des études historiques, XLVI, Beyrouth 2004).

6- Participation à l'École d'Été d'Histoire des Sciences, intitulée. «La Transmissione Del Sapere Scientifico E Tecnico Dal Mediterraneo Antico All'Europa Moderna», organisée par CISST «Centro internazionale di Storia dello Spazio de Tempo» qui a eu lieu à l'Université de Padoue (Italie) du 11 au 17 septembre 2000.

7- Participation au «40th SCIENCE WEEK – Celebration of The Arab Scientist Sharaf Aldeen Al-Tusi». Syria – Auditoria of The University of Tachreen, 4 – 9 November 2000.

8- Participation au colloque «Sciences et Philosophie arabes: thèmes, problèmes et cas ». Carthage, 28 novembre – 2 décembre 2000.

9- Participation au colloque international « Identité culturelle des sciences et des philosophies arabes : auteurs, œuvres et transmissions», Namur-Bruxelles, 15-18 janvier 2003. Colloque organisé par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Belgique (Fondation Ochs-Lefebvre) et par la Société Internationale d'Histoire des Sciences et des Philosophies arabes et islamiques (SIHSPAI)

10- Participation au VII^{e} Colloque international de la «société internationale d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Islamiques ». Florence, 16-18 février 2006, Facoltà di Scienza della Formazione, via del Parione 7.

11- Participation au Colloque international : « La Démonstration de l'antiquité à l'âge classique ». Paris, 3-6 juin 2008, Université Paris, U.F.R. de Philosophie. Titre de communication « Sur une proposition sphérique remarquable de *l'Istikmāl* d'Ibn Hūd »

12- Séjours scientifiques au CNRS français, UMR 7062 CNRS/EPHE V/Univ. Paris 7, Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales, dans le cadre des travaux de recherche:
   - du 15 novembre 2000 au 14 janvier 2001
   - du 2 avril au 29 septembre 2001.
   - du 1er août au 30 septembre 2002

- du 1er juillet au 30 septembre 2003.
- du 1er juillet au 30 septembre 2004.
- du 13 janvier au 1er février 2005.
- du 06 jusqu'au 29 juin 2005 (soutenance d'une deuxième thèse doctorale)
- du 01 février 2008 au 07 mars 2008.
- du 15 mars 2008 au 08 juin 2008
- 16 septembre 2008 au 15 octobre 2008 (comme prof. invité par l'Université Paris Diderot - Paris 7, UFR Sciences du Vivant).

13- Direction en DEA Modélisation et calcul intensif. AUPELF – UREF, Université Libanaise, Université Saint – Joseph en partenariat avec : l'Université de Reims, l'Université de Rennes – IRISA et École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Étudiant : Roukos El Hage. Projet : « Mise en œuvre de la géométrie de Lobatchevsky modélisée par le disque de Poincaré ». Décembre 2000.

14- Participation à l'École Internationale d'Été sur l'Histoire des Mathématiques, organisée par le Centre de Recherche HSM, Histoire des Sciences en Méditerranée « Centro di Ricerca sulla Storia del Pensiero Scientifico del Mediterraneo "Tommaso Cornelio » ; en collaboration avec le Département des Mathématiques de l'Université de la Calabria, le Département des Mathématiques de l'Université de Milan et le Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales (le C.N.R.S. – France et l'Université Paris-VII). L'École avait lieu à San Giovanni in Fiore, Centro Florens, en Calabria, Italie (27 août – 14 septembre 2007)

15- Codirection d'une thèse doctorale, dans le cadre d'une convention entre l'Université Libanaise et l'Université de Technologie de Troyes. Directeur de thèse : prof. Eric Chatelet; Thésard : Mazen El Falou ; Titre des travaux : Modèles de fiabilité et de maintenance de systèmes industriels prenant en compte les incertitudes des données. La soutenance de cette thèse avait lieu à la fin de 2010.

16- Traduction de la langue française en arabe du livre : Œuvre mathématique d'al-Sijzī; auteur : prof. R. Rashed ; Éditions Peeters, Louvain – Paris, 2004.

17- Participation à la formation de formateurs aux Technologie de l'information : *TRANSFER* – BEYROUTH, du 26 au 30 janvier 2009. L'atelier a été organisé par l'AUF et le CNRS-Liban.

18- Participation (comme chercheur invité) avec un discours au Séminaire « Sciences et philosophie, de l'antiquité à l'âge classique », (*Les Sphériques)* Université Paris 7 ; 13 juin 2009.

19- Participation à la troisième édition du Forum de Fès sur l'Alliance des civilisations et la diversité culturelle sous le thème : Médias et communication: Enjeux et défis du troisième Millénaire. Fès, les 15-16-17 novembre 2009.

20- Publication d'un article, sous le titre: "RECHERCHE ET ENSEIGNEMENT EN EUROPE", dans "Lettre du Bureau Moyen-Orient". Agence Universitaire de la Francophonie, numéro 55, mai 2010, cahier spécial: "Les sciences arabes", page 9.

21- Participation avec deux discours, à la "Deuxième École d'Histoire Conceptuelle des Mathématiques", Cordoba – Argentine, 23-27 novembre 2010.

22- Participation au 30ème congrès d'histoire des sciences arabes, à l'Institut d'Histoire des Sciences Arabes à Alep avec un discours: "Sur la valeur épistémologique due à la découverte du théorème des sinus dans la tradition arabe", Alep 5-7 décembre 2010.

23- Traduction de la langue française en arabe de deux volumes II (500 pages) et IV (900 pages) du livre encyclopédique: *Mathématiques infinitésimales* du IXème au XIème siècle; auteur : R. Rashed ; Éditions Al Furqan – Londres, 1993, 2002.

24- Participation (comme chercheur invité) avec un discours au « Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques», (Sur la géométrie *sphériques dans la tradition arabe)* Université de Marseille-France; 18 mai 2011.

25- Participation avec deux discours, à la "Troisième École d'Histoire Conceptuelle des Mathématiques", Ubatuba – Sao Paulo, Brésil, 09-14 avril 2012.

26- Participation (comme chercheur invité) avec deux discours :

- 1er octobre 2013, 17h: « Déterminisme dans la construction des systèmes numériques», Salle FRUMAM, campus St Charles (Marseille).
- 17 octobre 2013, 17h: « Études sur le développement des sphériques de Théodose et de Ménélaüs dans la tradition géométrique arabe», MMSH (Aix en Provence), salle Duby.

27- Conférence sur le thème « la géométrie sphériques dans la tradition arabe », organisée par l*'Ordre d'ingénieurs de Tripoli et du Liban Nord*,16 janvier 2014.

28- Participation au Colloque International« Histoire et Philosophie des mathématiques et disciplines associées en Méditerranée », Aix Marseille Université - Ceperc (UMR 7304), 4-6 novembre 2015.Discours : « Sur un problème d'extrema des *Sphériques* de Théodose d'après un texte de l*'Istikmāl* d'Ibn Hūd ».

ORDINATEUR ET LOGICIELS

-Systèmes: MS-DOS, WINDOWS (WORD, EXCEL,…)

-Logiciels symboliques : Mathematica, Maple, ...

AUTRES INTÉRÊTS

Recherches scientifiques mathématiques; histoires des mathématiques et des sciences exactes; épistémologie et philosophie des sciences.